

相対論的 Vlasov–Maxwell 離散方程式系に関する数学的研究

白戸 高志, 大西 直文 (東北大学 工学研究科), 千徳 靖彦 (大阪大学 レーザー科学研究所)



相対論的 Vlasov–Maxwell 系は弱結合プラズマに対する第一原理方程式であると認識されてきた。これは、以下に示す相対論的 Vlasov 方程式, Ampere–Maxwell の式, および Faraday–Maxwell の式から成る。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{\gamma m c} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

これらの方程式系に対し、偏微分演算子の交換法則、積の微分法則、部分積分を用いることで、Gauss の法則、磁場のソレノイダル条件、電荷・運動量・エネルギー保存則を復元できる。しかしながら、Vlasov–Maxwell 系の数値シミュレーションを行う際に保存則が破られるという問題に、プラズマ理論物理学者は半世紀以上苦しめられてきた。我々は、微分積分学の数学公式が離散化レベルでも厳密に成立するように設計した差分オペレータを用いて、新たな数値計算手法を開発した。

計算理論の妥当性を検証するために、相対論的 Weibel 不安定性による実証実験を行った。磁場エネルギーの増幅が止まる非線形段階まで計算が進行しても、全ての保存則の誤差が丸め誤差レベルに維持されることを実証した。

